PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 1

ARITMÉTICA

Múltiplos y divisores

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec
en Montreal, Canadá

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA | SEP

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

ILCE

BID

PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 1

ARITMÉTICA

Múltiplos y divisores

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec en Montreal, Canadá

Proyecto: Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe
Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
Serie: Enseñanza de las matemáticas
Sección: Aritmética

Módulo 1: Múltiplos y divisores

Diseño de colección y de portada: Margarita Morales y Mayela Crisóstomo
Formación: Miguel Ángel Silva Aceves
Corrección de estilo: Armando Ruiz Contreras

Primera edición: 2006.

ISBN 970-702-183-7 obra completa
ISBN 970-702-173-X módulo 1

Impreso y hecho en México

ÍNDICE

Presentación del proyecto 5

Introducción 29

Múltiplos y divisores 34

Planteamiento de los problemas 34

Primera sesión 34

Segunda sesión 34

Objetivos 35

Planeación de las actividades con los alumnos 35

Primera sesión 35

Segunda sesión 36

Descripción de las actividades 37

Primera sesión 37

Segunda sesión 38

Generalización 39

Planteamiento del problema general 39

Conclusiones 39

Lo que hicieron los alumnos 40
Respuestas esperadas 40
Respuestas no esperadas 40
Dificultades 40

Planeación de la sesión con los maestros 41

Descripción de las actividades 42

Lo que hicieron los maestros 43
Respuestas esperadas 45
Respuestas no esperadas 45
Dificultades 46

Lo que aprendieron los alumnos 46

Recomendaciones para la enseñanza 46

Ampliación del tema 47

Teorema fundamental de la aritmética 49

Bibliografía 53

PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

Tenoch Cedillo Ávalos

Objetivos

La serie Enseñanza de las Matemáticas se desarrolla en el marco del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe; esta serie tiene como propósito central fortalecer el conocimiento de las matemáticas escolares y las prácticas de enseñanza de los profesores que se desempeñan en el nivel de educación secundaria (7°-9° grados, 13-15 años de edad). En este propósito subyace la hipótesis de que un mejor desempeño de los docentes se reflejará en aprendizajes más sólidos y de mayor calidad en los alumnos.

Pretendemos que la discusión y análisis de los materiales que incluye esta serie, permitan a los maestros reflexionar sobre sus concepciones y prácticas de enseñanza, y que esta experiencia les proporcione elementos para responder preguntas como las que planteamos a continuación:

- ¿Cree que sus estudiantes no pueden resolver problemas a menos que usted les haya enseñando previamente cómo hacerlo?
- ¿Cree que si les pide a sus alumnos que resuelvan un problema ellos lo harán en formas muy similares?
- ¿Cree que puede emplear las soluciones que desarrollan sus estudiantes como fuentes para enriquecer sus estrategias de enseñanza? ¿Cómo?
- ¿Cree que es conveniente propiciar oportunidades para que sus alumnos resuelvan problemas usando sus propias estrategias? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente pedir a sus estudiantes que le informen cómo razonaron para resolver un problema dado? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente exigir a sus educandos que usen los procedimientos que les enseñó y que usted asuma la reproducción de esos procedimientos como sinónimo de comprensión?

También nos proponemos que la serie Enseñanza de las Matemáticas proporcione experiencias que permitan a los profesores desarrollar concepciones y prácticas de enseñanza como las que mencionamos enseguida.

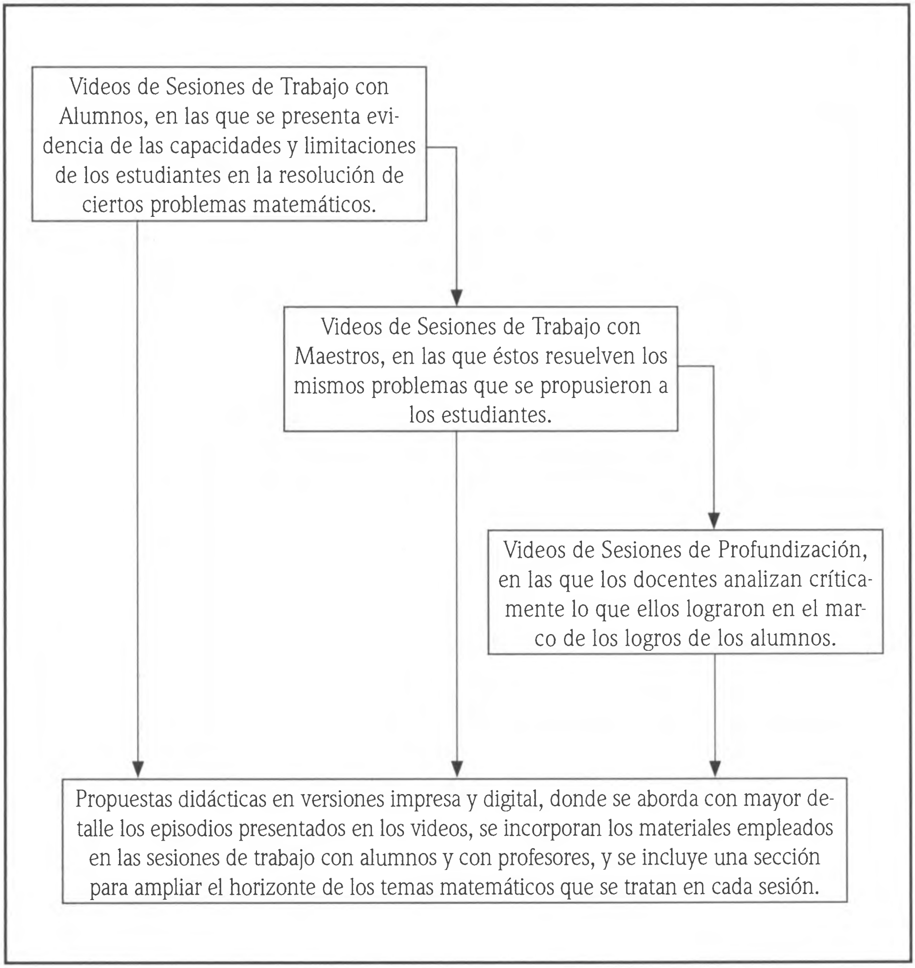
Que el maestro:

- Genere un ambiente de trabajo que favorezca que sus estudiantes desarrollen habilidades matemáticas y destrezas operativas.
- Aproveche la evolución del pensamiento matemático de sus alumnos para planear el desarrollo del programa escolar.
- Genere oportunidades para que sus estudiantes resuelvan problemas sin necesidad de instrucciones explícitas.
- Utilice las formas en que sus estudiantes razonan para diseñar mejores estrategias de enseñanza.
- Desarrolle el curso en consonancia con lo que sus alumnos van aprendiendo.
- Sea capaz de proponer problemas distintos a cada equipo de trabajo, y en ocasiones a cada estudiante, de acuerdo con los intereses y capacidades de ellos.
- Evalúe el desempeño de sus estudiantes con base en las habilidades matemáticas que ellos desarrollen.
- Valore el potencial de la técnica de aprendizaje cooperativo como un recurso fructífero en la clase de matemáticas.

Materiales

Esta serie ofrece un conjunto de materiales dirigidos a profesores de matemáticas en servicio y a formadores de los futuros docentes de matemáticas, que se desempeñarán en el nivel de educación secundaria. La estrategia que proponemos para el logro del propósito antes mencionado, es brindar un programa de profesionalización docente que se basa en un análisis crítico de la práctica en el aula con la finalidad de enriquecerla. La investigación que hemos realizado en este campo, ratifica enfáticamente que la experiencia que los profesores adquieren mediante el análisis de las prácticas de enseñanza de otros se refleja de manera favorable en sus concepciones y conocimientos sobre la disciplina, el aprendizaje y la docencia (Cedillo, 2003).

Los materiales que presentamos se describen brevemente en el esquema que se muestra a continuación.



Sujetos que participan en las sesiones de trabajo

Además del decidido apoyo otorgado por las más altas autoridades de las instituciones que patrocinaron este proyecto, así como de la invaluable colaboración del equipo técnico de televisión, participaron estudiantes de secundaria, maestros en servicio, profesores que condujeron las sesiones de trabajo en el aula, y un docente que estuvo a cargo de la producción y la dirección académica de todas las actividades del programa.

Los grupos escolares que participaron en el proyecto, cursan el segundo grado de secundaria (8° grado, 13-14 años de edad) en dos escuelas públicas de la ciudad de México que se destacan por su organización, compromiso de sus profesores y el buen desempeño de sus estudiantes. Los jóvenes que se observan en los videos son alumnos promedio de esas instituciones, no fueron seleccionados por poseer cualidades especiales. El grado escolar de los educandos se eligió en consonancia con los conceptos y conocimientos matemáticos que se abordan en las actividades de aprendizaje que se les propusieron. La intervención de esos grupos escolares, en esta serie, se debe a la colaboración de las autoridades educativas y de los directivos de las escuelas secundarias públicas que nos permitieron trabajar con sus estudiantes. La participación de los alumnos se organizó de acuerdo con los horarios de clases de su respectivo plantel, por esta razón, a lo largo de los videos, se pueden observar diferentes grupos de educandos y de maestros.

Todos los docentes que colaboraron en esta serie prestan su servicio en escuelas secundarias públicas ubicadas en la ciudad de México. Es necesario mencionar que los profesores que conducen las sesiones de trabajo, no son los maestros que normalmente dirigen a los grupos que se observan en los videos. La razón de esto es que las sesiones de trabajo con alumnos incluyen temas y actividades que no necesariamente tienen previstas los maestros de los grupos escolares, en los momentos en que este proyecto lo requería, por lo que fue indispensable contar con docentes específicamente asignados al proyecto con la finalidad de que dispusieran del tiempo y los recursos para preparar y conducir las sesiones de trabajo en el aula.

El hecho de que los profesores que condujeron las sesiones no hayan sido los docentes regulares de los grupos, presenta ventajas y desventajas, por ejemplo, nos parece importante mencionar que nuestros maestros no conocían a los estudiantes, situación que, por supuesto, no ocurre entre éstos y su maestro habitual. No obstante, los logros de los alumnos que se pueden observar en los videos, sugieren que la planeación y puesta en práctica de las actividades de aprendizaje son factores que influyen sensiblemente en un rápido establecimiento de una buena relación alumno-profesor, independientemente del tiempo que hayan tenido para relacionarse entre sí.

El trabajo en el aula

En los videos, se presentan episodios tal como ocurrieron en el aula; los videos muestran un acercamiento a la enseñanza que tiene como propósito poner en práctica los preceptos del constructivismo social, empleando la técnica del aprendizaje cooperativo, así como un enfoque del aprendizaje basado en la resolución de problemas. Utilizamos deliberadamente el término "sesiones de trabajo", en lugar de "clase modelo", para distinguir el enfoque de enseñanza que aquí mostramos del esquema tradicional que rápidamente se identifica con la cátedra del profesor, en la que éste "entrega" sus conocimientos a unos alumnos que están atentamente escuchándole para "recibirlos". Estos conceptos se discuten más adelante con mayor amplitud.

En los videos de las sesiones de trabajo con los estudiantes y con los profesores, podrán observarse los aciertos, errores y momentos de incertidumbre que usualmente se suscitan en el proceso de resolución de problemas matemáticos no triviales, y en las vicisitudes propias de la conducción de una sesión de trabajo, cuyo éxito o fracaso depende esencialmente de la participación de cada uno de los integrantes del grupo con el que se está trabajando. En los videos, se observa un esfuerzo sostenido por parte del profesor que conduce la sesión para desempeñarse como un *promotor* del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes, y no como un expositor que presenta una brillante cátedra a un auditorio atento y pasivo. Las sesiones de trabajo se centran en las participaciones de los alumnos, porque es a partir de sus respuestas que el profesor propiciará que se dé el siguiente paso en el avance de sus aprendizajes. Las intervenciones del maestro que conduce una sesión, se enfocan en la coordinación del trabajo del grupo, empleando todos los recursos que tiene a su alcance, en ese momento, para recuperar y enriquecer las participaciones de los estudiantes y, con base en esto, dar un horizonte más amplio al contenido matemático que se está explorando. En los videos podrá observarse que el maestro tenía preparado un guión para la clase; pero también se percibe que siempre estuvo atento a las respuestas de los alumnos para ir haciendo ajustes al guión de trabajo previsto y, de este modo, poder aprovechar de la mejor manera posible los aciertos y errores de los estudiantes, los cuales empleaba como puntos de partida en la búsqueda de una secuencia de enseñanza que estuviera en mejor consonancia con las distintas formas de razonamiento de sus alumnos.

Contenidos matemáticos

Para seleccionar los contenidos matemáticos de esta serie, se hizo una revisión de los programas de estudio para la escuela secundaria que se ofrecen en los países de América Latina y el Caribe, a partir de esta consulta se eligieron algunos temas de aritmética, álgebra y geometría, definiéndose, así, las ramas de las matemáticas escolares en que se ubicarían dichos contenidos. Posteriormente, se acudió a la literatura de investigación sobre aprendizaje de las matemáticas, con base en ésta fueron seleccionados los temas específicos dentro de cada rama de acuerdo con los siguientes criterios:

- La relevancia que les da la investigación por las dificultades que presentan para su enseñanza y aprendizaje.

- La importancia que les da la investigación por su trascendencia como temas propedéuticos, sobre los que descansa la evolución del currículo escolar en su tránsito al currículo de matemáticas en los niveles de educación superior.

Finalmente, en el marco determinado por los alcances de este proyecto, se decidió abordar tres temas en aritmética y geometría, y cuatro en álgebra, quedando distribuidos como se muestra en el siguiente cuadro.

Aritmética	Álgebra	Geometría
Múltiplos y divisores	Patrones numéricos y generalización	Medición y semejanza de triángulos
Máximo común divisor	Juegos y regularidades algebraicas	Medición y razones trigonométricas
Mínimo común múltiplo	Ecuaciones de primer grado	Áreas y teorema de Pitágoras
	Lectura y construcción de gráficas cartesianas	

Organización y presentación de los contenidos

Videos

El desarrollo de cada tema constituye un *módulo* que está formado por dos videos y una *Propuesta didáctica* impresa. Cada tema se inicia con una *cápsula de video* que se preparó para presentar de forma amena y clara la información relevante del problema que se propone para que los alumnos lo resuelvan, y también se emplea para centrar la atención de los alumnos en el tema a tratar. Esa cápsula puede ser usada por los profesores que la consideren útil en su tarea docente. Algunas cápsulas incluyen recursos electrónicos de la geometría dinámica, o tablas con datos que pueden ser utilizadas en las clases que preparen los maestros que reciben estos materiales.

El primer video de cada módulo incluye las dos sesiones de trabajo que se emplearon con alumnos para desarrollar el tratamiento del tema correspondiente, cada sesión se tiene una duración máxima de 50 minutos. El tema se aborda a partir de la resolución de uno o más problemas matemáticos; estas sesiones de trabajo se realizan con la participación activa de un grupo de estudiantes. El núcleo en el estudio de un tema es la resolución de problemas que representan un reto para el intelecto de los alumnos, por esto, sus intervenciones nunca consisten en la repetición de conceptos u otros conocimientos que previamente se les habían enseñado, en vez de esto, las participaciones de los estudiantes ofrecen una reelaboración o una aplicación creativa de conceptos y conocimientos que los conducen a proponer ideas plausibles que eventualmente se concretan en la resolución de un problema. Dada la complejidad de los ejercicios que se propusieron, se decidió apoyar la actividad de los estudiantes utilizando la técnica de *aprendizaje cooperativo.* Esta técnica exige la colaboración conjunta y creativa de todos los miembros de un equipo de trabajo para realizar una tarea, en otras palabras, requiere que el trabajo en equipo, además de necesario, sea más productivo que el trabajo individual. Dada la importancia que tuvo en el proyecto el uso de la técnica de aprendizaje cooperativo, más adelante le dedicamos una sección para un análisis más amplio.

El segundo video del módulo incluye una secuencia que muestra la *Sesión de Trabajo con Maestros* y la *Sesión de Profundización.* La *Sesión de Trabajo con Maestros* permite observar las formas en que ellos abordaron problemas iguales o similares a los que se propusieron a los alumnos. Es importante señalar que cuando se pidió a los maestros que resolvieran esos problemas, aún no habían visto los videos de las sesiones de trabajo con los alumnos, esto se realiza en la *Sesión de Profundización.*

En las sesiones de profundización, se pide a los profesores que vean atentamente los videos de las sesiones con alumnos, y que registren individualmente sus observaciones de acuerdo a un guión que se les proporcionó; el guión permite que los docentes incluyan comentarios sobre aspectos no considerados en él. Una vez que han hecho esto, se pide a los maestros que discutan en equipos de trabajo las anotaciones que registraron de manera individual; después de esto, se organiza una mesa de discusión con todos los equipos reunidos, donde debaten acerca de sus observaciones y hacen propuestas respecto a las implicaciones que se derivan de su experiencia en estas sesiones de trabajo en torno a su práctica docente cotidiana. La *Sesión de Profundización* concluye con la sección *Reflexiones después de la práctica*, que presenta el coordinador académico de esta serie.

Propuestas didácticas

Se elaboró una *Propuesta didáctica* para cada uno de los módulos que comprende esta serie. Las propuestas didácticas se presentan en formato impreso y en formato digital. Estos materiales tienen como propósito exponer información adicional que permita analizar con mayor acuciosidad las sesiones de trabajo que se muestran en los videos. En cada propuesta se proporciona una descripción detallada sobre las actividades que se llevaron a cabo en las sesiones de trabajo con alumnos y con maestros. Asimismo, se incluyen cada uno de los materiales que se emplearon, al igual que un ensayo crítico de lo que ocurrió durante el tratamiento de cada tema, en términos de los logros de los estudiantes en el marco de lo que originalmente fue el guión de trabajo para cada sesión. Por lo anterior, **recomendamos enfáticamente que antes de observar los videos se lea la *Propuesta didáctica* correspondiente**.

Los asuntos que se abordan en cada *Propuesta didáctica* se describen brevemente a continuación.

Presentación y objetivos del tema

Además de los objetivos de cada sesión de trabajo con los alumnos, este apartado incluye un ensayo en el que se presentan los argumentos considerados para seleccionar el contenido matemático que se aborda, y una descripción del guión de trabajo que empleó el profesor para desarrollarlo.

Materiales de las sesiones de trabajo con los alumnos

Esta sección proporciona información detallada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los estudiantes.

Materiales de las sesiones de trabajo con los maestros

Este apartado ofrece información pormenorizada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los profesores.

Lo que aprendieron los alumnos

En esta parte, el profesor que estuvo a cargo del desarrollo de la sesión de trabajo, presenta un ensayo sobre los logros de los estudiantes; el ensayo contiene un análisis entre lo esperado por el maestro y las respuestas no esperadas que ofrecieron los alumnos, y cómo éstas lo condujeron a modificar, sobre la marcha, el guión que había preestablecido para realizar su trabajo.

Recomendaciones para la enseñanza

Con base en el análisis de los logros de los estudiantes, y de las vicisitudes que tuvo que sortear, el profesor que estuvo a cargo de la conducción del trabajo presenta una serie de reflexiones que se expresan como recomendaciones para la enseñanza.

Ampliación del tema

Este apartado tiene como propósito profundizar en el tratamiento del contenido matemático que se abordó en la sesión de trabajo. Se incorporan nuevos elementos y recursos didácticos cuya finalidad es ampliar el conocimiento de los contenidos matemáticos que se trataron en las sesiones de trabajo con **alumnos y los correspondientes con maestros.**

El contexto internacional y principios que orientan este proyecto

Los resultados obtenidos por los estudiantes latinoamericanos en las evaluaciones internacionales que se han efectuado recientemente, han acentuado la atención que los ministerios de educación dedican a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Beaton *et al.*, 1996; OECD, 2000). El análisis de esas evaluaciones sugiere enfáticamente que para mejorar esos resultados deben instrumentarse nuevos programas orientados a la actualización, tanto de las formas de enseñanza como del conocimiento de la disciplina por parte de los maestros de matemáticas en servicio.

La investigación realizada en los últimos 30 años sobre el aprendizaje de las matemáticas, ha proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas estrategias de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación (Kilpatrick, 1992). Los resultados de esas investigaciones han ejercido una fuerte influencia en el diseño de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica y, por lo mismo, han surgido nuevas exigencias en el desempeño de los docentes, por ejemplo, en muchos países se incluyeron en los programas de estudio nuevas líneas temáticas, como preálgebra, precálculo, probabilidad y estadística.

La investigación sobre la enseñanza ha cambiado del paradigma proceso-producto –en el que el objeto de indagación son los comportamientos del profesor– a estudios abocados a sus concepciones y criterios para la toma de decisiones en el aula. Asimismo, las teorías que se enmarcan en el constructivismo social también han tenido impacto en los programas de formación de profesores y el currículo de la escuela básica. Brevemente expuesto, estas teorías conciben el conocimiento como un producto del trabajo intelectual de comunidades formadas por individuos creativos; estas corrientes de pensamiento se reflejan en cursos y materiales que intentan que el profesor deje su papel como transmisor de conceptos, hechos básicos y destrezas, para que se desempeñe como tutor del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes (Cobb *et al.*, 1990).

Actualmente, se espera que los profesores hagan evidente en su práctica profesional que están convencidos de que sus estudiantes no son "recipientes que esperan ser llenados", y los entiendan como sujetos intelectualmente creativos, capaces de hacer preguntas no triviales, de resolver problemas y de construir teorías y conocimientos plausibles. Lo anterior exige que el maestro despoje al libro de texto, y a él mismo, de su papel como autoridad intelectual en la clase y la deposite en argumentos rigurosos producidos por él y los estudiantes (Thompson, 1992).

Esa nueva perspectiva de enseñanza requiere que el profesor conozca el nivel de desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos, que construya materiales intelectualmente ricos, y propicie un ambiente de trabajo en el que el razonamiento de los educandos pueda ser, al mismo tiempo, apoyado y motivado.

A finales de los ochenta, se desarrollaron tres perspectivas distintas para estudiar los procesos de cambio en las prácticas de los profesores, cada una con fundamentos teóricos diferentes. La perspectiva piagetiana, que se sustenta en la teoría de que un cambio en las ideas de los docentes sobre la naturaleza del aprendizaje y de las matemáticas, requiere necesariamente un proceso de desequilibrio de las ideas previas y la reconstrucción de ideas más poderosas (Schifter, 1993; Schifter y Fosnot, 1993; Schifter y Simon, 1992). La corriente de las ciencias cognitivas propone que los cambios en el profesor se dan a través de que modifique el contenido y organización del conocimiento que posee, en consonancia con la evolución del razonamiento matemático de sus estudiantes (Carpenter *et al.*, 1988; Fennema *et al.*, 1996; Peterson *et al.*, 1989). La postura del constructivismo social expone que lo que permite a los profesores resolver los conflictos entre sus creencias sobre el aprendizaje y los avances que se observan en sus estudiantes, es el proceso de negociación entre ellos y sus alumnos sobre las normas para validar la construcción de los conceptos e ideas matemáticos (Ball, 1988; McDiarmid y Wilson, 1991).

La serie Enseñanza de las Matemáticas del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe, se propone compartir con los profesores de matemáticas en servicio y los formadores de futuros docentes, algunas estrategias plausibles que ejemplifican, mediante episodios de trabajo en el salón de clases, cómo llevar a la práctica en el aula los planteamientos del constructivismo social.

El modelo didáctico

En el periodo 2000-2003, se llevó a cabo en México un estudio con 800 profesores de matemáticas en servicio, en el que se evaluaron los efectos de la aplicación de un enfoque didáctico no convencional en sus prácticas de enseñanza y conocimiento matemático (Cedillo, 2003). Los resultados de ese estudio muestran vías promisorias para favorecer los aprendizajes de los estudiantes, aun con profesores cuya docencia está anclada en principios y concepciones tradicionales, y con un débil conocimiento de la disciplina que enseñan. Expuesto sucintamente, ese enfoque didáctico consiste en enseñar las matemáticas escolares de manera similar a como aprendemos el lenguaje materno, esto es, a través de su uso; el uso del lenguaje matemático en actividades adecuadamente diseñadas, permite que los estudiantes vayan asignando significados plausibles a ese sistema de signos.

En el aula, lo anterior se traduce en que el profesor no parte de exponer reglas, definiciones y ejemplos, en lugar de esto, el maestro propone una actividad (problema) que le permite establecer una interacción con sus estudiantes a partir de las formas de razonamiento que ellos desarrollan. El progreso de los alumnos en la actividad depende de la comprensión que logre el profesor de sus formas no ortodoxas de comunicación. Esto implica que el docente debe aceptar que sus estudiantes aprenden cada uno a un paso distinto, y que debe saber escucharlos para aprender acerca de las formas en que ellos razonan. Esta forma de enseñanza exige que el profesor abandone la exposición al frente del grupo como estrategia de interlocución, porque esto parte del supuesto de que el maestro puede hacer avanzar a todos los estudiantes del grupo al mismo ritmo. Además, es necesario que el docente desarrolle habilidades que le permitan relacionar los avances no convencionales de sus alumnos con los temas matemáticos formalmente establecidos, lo cual requiere la capacidad de desarrollar el currículo a partir de los logros de los estudiantes.

El aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo puede describirse como una relación entre estudiantes que les requiere (Johnson y Johnson, 1989):

- Necesitarse unos a otros para realizar una tarea.
- Un ejercicio de responsabilidad individual, en el que cada uno tiene que contribuir y aprender.
- Desarrollar habilidades para relacionarse: comunicación, confianza en sí mismos y en los demás, asumir eventualmente el liderazgo, tomar decisiones y resolver conflictos.

La técnica de aprendizaje cooperativo favorece que los estudiantes no solamente aprendan los contenidos propios de una disciplina, sino que desarrollen habilidades para cultivar relaciones personales con sus compañeros que probablemente no desarrollarían en una clase tradicional. Entre otras cosas, esto puede ocurrir si el maestro toma en cuenta la relación entre el desempeño del grupo y el individual, la preparación de sus estudiantes y las dificultades comunes que éstos presentan.

Se han reportado resultados de investigación que señalan que el éxito del aprendizaje cooperativo depende en buena medida de que los estudiantes se propongan objetivos grupales claramente definidos, y que asuman responsabilidades individuales bien especificadas (Leinken y Zaslavsky, 1999). Lindauer y Petrie (1997), sugieren que el sistema de evaluación del profesor puede apoyar al logro de metas colectivas, si lo estructura de manera que los estudiantes sean evaluados individualmente por su trabajo, y que el trabajo individual se oriente a que colaboren con sus compañeros en favor del éxito del grupo. Por una parte, la formulación y el logro de objetivos grupales en el aprendizaje cooperativo, proporciona a los alumnos una razón para trabajar juntos (Johnson y Johnson, 1989). Por otra parte, el exigir que cada individuo tenga responsabilidades particulares, asegura que todos los estudiantes se beneficiarán de la experiencia, incrementando su comprensión, a la vez que permite al maestro asegurarse de que todos en el grupo aprendan los nuevos conceptos. De esta manera, el éxito que el grupo tenga en alcanzar sus objetivos depende del nivel de logro que alcance cada uno de sus miembros.

El establecimiento de objetivos grupales y un sistema de evaluación que recompense el éxito puede hacerse de varias maneras, por ejemplo, el profesor puede reforzar en sus estudiantes el valor de ayudarse unos a otros, si evalúa el nivel de logro del equipo con base en el aprendizaje de cada estudiante (Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Posamentier y Stepelman, 1999). Más específicamente, el maestro puede asignar un porcentaje extra a la calificación de un equipo de trabajo en el que todos sus miembros lograron cierto puntaje. Las acciones del docente que refuerzan los objetivos grupales y la responsabilidad individual, ayudan a que los alumnos se preocupen por el éxito de sus compañeros, a que desarrollen una mejor capacidad de escucha, y a que valoren métodos alternativos para resolver problemas.

Lo anterior implica que los estudiantes deben estar específicamente preparados para participar en un ambiente de aprendizaje cooperativo, y que los profesores establezcan condiciones que garanticen experiencias exitosas de aprendizaje. El aprendizaje cooperativo no se da por el simple hecho de que los estudiantes trabajan en equipos durante la clase, esta técnica de trabajo en el aula sólo es provechosa cuando los miembros de un grupo se ven a sí mismos como parte de un equipo que debe alcanzar un objetivo de manera conjunta, ante una tarea que individualmente es mucho más difícil de llevar a cabo que haciéndolo con la colaboración de otros (Posamentier y Stepelman, 1999). El aprendizaje cooperativo se basa en la premisa de que los alumnos que trabajan juntos son responsables no sólo de su aprendizaje, sino también del de sus compañeros (Lindauer y Petrie, 1997), para esto, los estudiantes deben aprender a escuchar a los demás y a valorar el hecho de que un problema puede ser abordado en más de una forma. En síntesis, podemos decir que el aprendizaje cooperativo es una buena estrategia de trabajo en el aula; pero ésta no tiene éxito sin preparación.

Slavin (1990) afirma que los profesores pueden enfrentar algunas dificultades al aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo, y sólo obtendrán resultados provechosos si aprenden a emplearlo correctamente en la clase. El aprendizaje cooperativo puede ir en detrimento del aprovechamiento de los estudiantes, los alumnos menos avanzados pueden copiar el trabajo de los más adelantados del grupo, y el resultado puede ser más bajo del que ese alumno podría haber obtenido en una clase tradicional. Otra posible dificultad es que los maestros deben estar preparados para ceder parte del control que, tradicionalmente, tienen sobre las actividades que se realizan en el aula. Si bien es necesario asegurarse de que los estudiantes están realmente trabajando en un ambiente de aprendizaje cooperativo, es difícil evitar que hagan más ruido. Algunos docentes podrían percibir el ruido como un indicio de pérdida de control.

El aprendizaje cooperativo en la clase de matemáticas

Hay investigaciones que muestran que los beneficios del aprendizaje cooperativo se reflejan en un mejor desempeño escolar, mejores habilidades para comunicarse e interacciones sociales y académicas exitosas (Slavin, 1991; Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Whicker, Bol y Nunnery, 1997; Walmsley y Muñiz, 2003). Los efectos del aprendizaje cooperativo en el desempeño de los alumnos son muy impresionantes, los logros de los estudiantes que pueden observarse en los videos de esta serie ofrecen evidencias a este respecto. Esto se debe a diversas razones, en el trabajo cooperativo los alumnos ven cómo sus compañeros se encuentran en diferentes etapas de dominio de las tareas que enfrentan, y se ayudan unos a otros, por ejemplo, cuando los estudiantes interactúan en forma cooperativa hacen el intento por explicar sus estrategias a los demás, empleando las palabras de sus compañeros más débiles (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). En muchas ocasiones, los educandos que proporcionan la explicación pueden lograr así una comprensión más clara de la tarea que están abordando. Cuando se pide a los estudiantes que expliquen, detallen y defiendan sus posturas ante los demás, se esfuerzan en expresar más cuidadosamente sus ideas. Asimismo, los alumnos que escuchan las explicaciones de otros se esfuerzan en comprender otras formas de abordar una tarea determinada. El observar a los demás y practicar en este tipo de ambientes de trabajo, ayuda a los estudiantes a interiorizar los conceptos que están intentando comprender o dominar (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Probablemente, uno de los mayores beneficios del aprendizaje cooperativo es que incrementa la capacidad de los alumnos para comunicarse usando el lenguaje de las matemáticas, y que este tipo de comunicación les ayuda a comprender mejor esta disciplina (Artzt, 1999). Johnson y Johnson (1989, p. 235) afirman que "si la instrucción en matemáticas procura ayudar a los estudiantes a pensar matemáticamente, a comprender las conexiones entre diversos procedimientos y hechos matemáticos, y a ser capaces de aplicar el conocimiento matemático formal de manera flexible y significativa, entonces, es indispensable emplear el aprendizaje cooperativo en las clases de matemáticas". De acuerdo con estos autores, el aprendizaje cooperativo hace que las matemáticas se aprendan de manera activa, en vez de pasiva. Otros autores sugieren que, mediante la técnica del aprendizaje cooperativo, los profesores promueven que sus estudiantes expliquen lo que entienden, porque eso los obliga a integrar y ampliar su conocimiento de manera diferente (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Hay resultados de investigación que confirman la convicción de muchos maestros de que los alumnos aprenden mejor de sus compañeros cuando se les pide que expliquen cómo llegaron a las respuestas; los profesores que piden a los estudiantes que expliquen cómo resolver un problema frente al grupo, ayudan a que todos aprendan más y enfatizan las habilidades para expresarse acerca de conceptos matemáticos (NCTM, 2000). El aprendizaje cooperativo permite a los educandos dar y recibir explicaciones detalladas, esto les ayuda a aprender más que a los estudiantes que simplemente reciben las respuestas correctas (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). Es importante ejercitar la capacidad de comunicar ideas matemáticas para apoyar el desarrollo que el alumno tenga en esa disciplina. Leiken y Zaslavsky (1999) reportan que el uso del aprendizaje cooperativo motiva a los estudiantes a participar activamente en el aprendizaje de las matemáticas, y a comunicarse entre ellos sobre cuestiones de esta disciplina.

Otro beneficio del aprendizaje cooperativo es que permite a los alumnos trabajar con otros en el logro de un objetivo común y desarrollar habilidades para usar las matemáticas en interacciones sociales. De acuerdo con Whicker *et al.* (1997), algunos de los resultados a corto plazo incluyen un incremento en el aprendizaje, en la retención y en el pensamiento crítico. Comparado con un sistema competitivo e individualista, las experiencias del aprendizaje cooperativo promueven una alta autoestima en los estudiantes (Johnson, Johnson y Holubec, 1984; Johnson y Johnson, 1989). El aprendizaje cooperativo puede reforzar el sentimiento de autoaceptación del alumno, en tanto que la competitividad puede afectar de manera negativa dicha aceptación, y las actitudes individualistas tienden a estar relacionadas con un rechazo básico de sí mismo (Johnson, Johnson y Holubec, 1984). Los alumnos, generalmente, disfrutan la experiencia de trabajar en forma cooperativa, y les importa que sus compañeros los tengan en buen concepto. La necesidad de ser aceptados también los ayuda a lograr ser exitosos escolarmente, esta percepción de éxito incrementa su autoestima.

Los resultados a largo plazo del aprendizaje cooperativo incluyen la habilidad para ser contratados para trabajar y tener éxito en su carrera (Johnson y Johnson, 1989). Muchos empleadores valoran a un empleado con habilidades para comunicarse, con responsabilidad, iniciativa, interacción interpersonal y poder de decisión. Todas estas cualidades pueden ser desarrolladas al tener experiencias de aprendizaje cooperativo. El aprendizaje cooperativo no sólo ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas, sino que coadyuva en su preparación para la vida después de graduarse.

A manera de síntesis podemos sugerir que el aprendizaje cooperativo puede ser exitoso si:

- Se emplea para abordar actividades que exijan la colaboración del grupo.
- Los profesores cuentan con algún tipo de sistema de recompensas grupales que contemple la responsabilidad individual.
- Los maestros logran crear una actitud en sus alumnos que les conduzca a escuchar atentamente las ideas de los demás.

Comentarios finales

En la serie Enseñanza de las Matemáticas asumimos la premisa de que en la práctica profesional los sujetos tienen experiencias que producen cambios en sus conocimientos y creencias. Este principio es una combinación de lo planteado por el constructivismo social y las ciencias cognitivas. Por una parte, asumimos que la práctica profesional incluye la interacción creativa entre profesores, y de éstos con los estudiantes; por otra parte, implica que los individuos vamos modificando nuestras concepciones y acciones a partir del conocimiento que adquirimos sobre las formas de razonamiento de otros sujetos. La evidencia obtenida de la investigación sugiere que lo que esencialmente promueve cambios en los profesores son ciertos episodios que se dan en el aula, que les permiten atestiguar lo que sus estudiantes pueden lograr sin que "ellos se los hayan enseñado" (Cedillo y Kieran, 2003).

Indudablemente, serán los profesores que hagan uso de los materiales que se proporcionan en esta serie, los que emitan un mejor juicio sobre el alcance y pertinencia de los propósitos que nos hemos planteado, y sobre las estrategias de trabajo que en este proyecto hemos empleado.

BIBLIOGRAFÍA

Artzt, A. "Cooperative Learning in Mathematics Teacher Education", en: *Mathematics Teacher* (92),11-17, 1999.

Ball, D. L. *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* East Lansing, Michigan State University, 1988.

Beaton, A. E., *et al. Mathematics Achievement in the Middle School Years. Third International Mathematics and Science Study.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Center for the Study of Testing, Evaluation and Educational Policy, Boston College, Chesnut Hill, MA, EUA, 1996.

Carpenter, T. P., E. Fennema, P. Peterson y D. Carey. "Teacher's pedagogical content knowledge of students' problem-solving in elementary arithmetic", en: *Journal for Research in Mathematics Education* (19), 385-401, 1988.

Cedillo, T. "El álgebra como lenguaje en uso: Una alternativa plausible como factor de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas", en: *Perfiles Educativos*, vol. XXV, núm. 101, pp 123-160, México, 2003.

Cedillo, T. y C. Kieran. "Initiating Students into algebra with Symbol-Manipulating Calculators", en: J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran y R. M. Zbiek (eds.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education,* cap. 13, 219-239, National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA, 2003.

Cobb, P., T. Wood, E. Yackel. "Classroom as learning environments for teachers and researchers", en: R. Davis, C. Maher y N. Noddings (eds.), "Constructivist views on the teaching and learning of mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education Monograph* (4), 125-146, 1990.

Fennema, E., T. P. Carpenter, M. L. Franke, L. Levi, V. R. Jacobs y S. B. Empson. *A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. Journal for Research in Mathematics Education,* 1996.

Johnson, D. W., R. T. Johnson y E. J. Holubec. *Circles of Learning: Cooperation in the Classroom.* Edina, Minn., Interaction Book Co., 1984.

Johnson, David W. y Roger T. Johnson. "Cooperative Learning in Mathematics Education", en: *New Directions for Elementary School Mathematics.* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Paul R. Trafton (ed.), pp. 234-45. Reston, VA, NCTM, 1989.

Kilpatrick, J. "A History of Research in Mathematics Education", en: Grouws, D. A., (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Library Reference, Simon & Schuster Macmillan, Part I, 3-38. Nueva York, EUA, 1992.

Leinken, Roza y Orit Zaslavsky. "Cooperative Learning in Mathematics", en: *Mathematics Teacher* (92), 240-46, 1999.

Lindauer, P. y P. Garth. "A Review of Cooperative Learning: An Alternative to Everyday Instructional Strategies", en: *Journal of Instructional Psychology* (24), 183-88, 1997.

McDiarmid, G. W. y S. M. Wilson. "An exploration of the subject matter knowledge of alternative route teachers: Can we assume they know their subject?" *Journal of Teacher Education*, 42(2), 93-103,1991.

Miles, M. y A. Huberman. *Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods.* Londres, SAGE Publications, 1984.

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA, Author,1989.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional standards for the teaching of mathematics.* Reston, VA, Author, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA, NCTM, 2000.

OECD. *The PISA 2000. Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy.* Programme for International Student Assessment, Paris, Francia, 2000.

Peterson, P., T. Carpenter y E. Fennema. "Teacher's knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analyses", en: *Journal of Educational Psychology,* 81(4), 558-569, 1989.

Posamentier, A. S. y J. Stepelman, *Teaching Secondary School Mathematics.* Upper Saddle River, N J, Prentice-Hall, 1999.

Schifter, D. "Mathematics process as mathematics content: A course for teachers", en: *Journal of Mathematical Behavior* (12) 271-283, 1993.

Schifter, D. y C. T. Fosnot. *Reinventing mathematics education: Stories of teachers meeting the challenge of reform.* Nueva York, Teachers College Press, 1993.

Schifter, D. y M. A. Simon. "Assessing teacher's development of a constructivist view of mathematics learning", en: *Teaching and Teacher Education,* 8(2), 187-197, 1992.

Slavin, R. E. "Here to Stay-or Gone Tomorrow?, en: *Educational Leadership* (47), 250, 1990.

Stevens, R., R. Slavin y A. Farnish. "The Effects of Cooperative Learning and Direct Instruction in Reading Comprehension Strategies on Main Idea Identification", en: *Educational Leadership* (83), 8-15, 1991.

Thompson, A. "Teacher's believes and conceptions: A Synthesis of the Research", en: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* D. A. Grows (ed.), National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA, 1992.

Walmsley, A. y J. Muñiz. "Cooperative Learning and Its Effects in a High School Geometry Classroom", en: *Mathematics Teacher,* vol. 96, núm. 2, pp. 112-119, NCTM, EUA, 2003.

Whicker, K., L. Bol y J. A. Nunnery, "Cooperative Learning in the Secondary Mathematics Classroom", en: *Journal of Educational Research* (91), 42-48, 1997.

INTRODUCCIÓN

La matemática es la reina de las ciencias y la teoría de números es la reina de las matemáticas.[1]
Gauss

Sin duda, las matemáticas a lo largo de su desarrollo histórico han estado ligadas a las necesidades prácticas de la humanidad.

> "En el caso de la aritmética la respuesta también la proporciona la historia. Vimos cómo los pueblos aprendieron a contar y llegaron al concepto de número, y cómo las necesidades de la vida, planteando problemas más difíciles, requirieron la introducción de símbolos numéricos. En una palabra, las fuerzas que condujeron al desarrollo de la aritmética fueron las necesidades prácticas de la vida social. Estas necesidades prácticas y el pensamiento abstracto que surgió de ellas ejercieron unos sobre otros una constante interacción. Los conceptos abstractos constituyen en sí una valiosa herramienta para la vida práctica y fueron constantemente mejorados debido a sus muchas aplicaciones. Al hacer abstracción de lo esencial se desvela lo esencial y garantiza el éxito en aquellos casos en que el papel importante corresponde precisamente a esas propiedades y relaciones elegidas y preservadas por la abstracción, y que son, en el caso de la aritmética, las relaciones cuantitativas.
>
> Además, la reflexión abstracta a menudo va más lejos que las necesidades inmediatas de un problema práctico".[2]

> "Los conceptos y conclusiones de la aritmética, que generalizan una enorme cantidad de experiencias, reflejan en forma abstracta aquellas relaciones del mundo real que

[1] Courant, R. y H. Robbins. *¿Qué es la matemática?* Madrid, Ed. Aguilar, 1979, p 28.
[2] Aleksandrov, A. D., A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros. *La matemática: su contenido método y significado.* España, Ed. Alianza Universidad, 1980, p 37.

se encuentran constantemente y en todas partes. Es posible contar los objetos de una habitación, las estrellas, la gente, los átomos, etc. La aritmética considera algunas de sus propiedades generales, haciendo abstracción de todo lo particular y concreto, y es precisamente porque se consideran únicamente estas propiedades generales por lo que sus conclusiones son aplicables a tantos casos. La posibilidad de un amplio rango de aplicaciones está garantizada por la gran abstracción de la aritmética, aunque es importante hacer notar que esta abstracción no es vacía, sino que se deriva de una gran experiencia práctica. Lo mismo es cierto para toda la matemática y para cualquier concepto abstracto o teoría. Las posibilidades de aplicación de una teoría dependen en gran medida del material original que ella generaliza".[3]

"Las abstracciones de la matemática se distinguen por tres rasgos. En primer lugar, tratan fundamentalmente de las relaciones cuantitativas y formas espaciales, abstrayéndolas de todas las demás propiedades de los objetos. En segundo lugar, aparecen en una sucesión de grados de abstracción creciente, llegando mucho más lejos en esta dirección que la abstracción en las demás ciencias... Finalmente, y esto es obvio, la matemática como tal se mueve casi por completo en el campo de los conceptos abstractos y sus interrelaciones".[4]

"En el siglo III a. C., los griegos habían reconocido claramente dos ideas importantes: primera, que la sucesión de números era susceptible de ser prolongada indefinidamente; y segunda, que no sólo era posible operar con números cualesquiera dados, sino también referirse a los números en general y formular y probar teoremas sobre ellos. Esta idea representa la generalización de una cantidad inmensa de experiencias anteriores con números concretos, de las cuales entresacaron las reglas y métodos para razonamientos *generales* sobre los números. Se había operado una transición a un nivel más alto de abstracción: de números concretos (entes individuales, aunque abstractos) a números en general, es decir a cualquier número posible".[5]

[3] *Idem.* p. 36.
[4] *Idem.* p. 18.
[5] *Idem.* p. 33.

"Los teoremas generales sobre cualquier propiedad de un número arbitrario contienen ya en forma implícita infinidad de asertos sobre las propiedades de cualquier número y son por tanto cualitativamente más ricos que cualesquiera asertos particulares que pudieran verificarse para números específicos. Por esta razón los teoremas generales deben ser probados por razonamientos generales derivados de la regla fundamental de formación de la sucesión de los números. Aquí percibimos una profunda particularidad de la matemática: la matemática tiene como objeto no sólo relaciones cuantitativas dadas, sino todas las posibles relaciones cuantitativas, y entre ellas el infinito".[6]

"La mayor parte de la teoría de números, como en general de la matemática, no se refieren a un objeto particular –el número 5 o el número 32–, sino a una clase completa, de objetos que tienen alguna propiedad común, por ejemplo:

La clase de todos los números pares:

2, 4, 6, 8...

o la clase de enteros divisibles por 3:

3, 6, 9, 12...

o bien la clase de los cuadrados de los números enteros:

1, 4, 9 16...

y así sucesivamente".[7]

En *Los elementos* de Euclides, escritos en el siglo III antes de C., ya encontramos teoremas generales sobre los números, en particular aquel que afirma que existen números primos infinitamente grandes.

Los temas sobre números primos y compuestos se incluyen en los programas de matemáticas de la escuela secundaria; uno de los contenidos principales es la elaboración de tablas de primos, factorización en primos de un número y sus aplicaciones (enumeración de los divisores de un número). Entre los propósitos relacionados con el tema se pueden destacar los siguientes:

[6] *Idem.*

[7] Courant, R. y H. Robbins. *¿Qué es la matemática?* Madrid, Ed. Aguilar, 1979, p 28.

- Enriquecer el significado de los números y sus operaciones a través de la solución de problemas muy variados.
- Familiarizarse con los diversos medios de expresión matemática: la escritura simbólica, las tablas y las gráficas, y utilizarlos en la solución de problemas.
- Iniciarse gradualmente en el razonamiento deductivo, en situaciones escogidas por el maestro.

Un número importante de autores de materiales dirigidos a maestros de enseñanza secundaria sostiene que la enseñanza ha dedicado mucho tiempo al estudio de los criterios de divisibilidad y a los procedimientos para obtener el *mínimo común múltiplo* y el *máximo común divisor*, pero presta poca atención al desarrollo de las nociones para comprender estos procedimientos. No es raro que al terminar la secundaria haya alumnos que todavía tienen dificultades para identificar los números primos, con frecuencia los confunden con los impares o con los múltiplos de tres. Cuando se les pide dar los divisores de 63, pueden encontrar el 3, 7 y el 9, pero olvidan que todo número es divisible entre 1 y entre sí mismo, y casi no citan al 21 entre los divisores de 63.

Entre las recomendaciones que se hacen a los maestros cuando diseñan actividades para la clase, se destaca que el maestro no debe olvidar que la teoría elemental de los números es rica en situaciones y problemas que se planean con facilidad, y que los alumnos pueden explorar activamente al mismo tiempo que desarrollan nociones que les servirán para comprender otras partes de las matemáticas y apreciar la belleza de esta disciplina.

De lo anterior, se deriva que es conveniente proponer problemas y actividades que permitan al alumno explorar libremente, tomar en cuenta sus aportes, respetar sus ideas y acercamientos y no imponer los procedimientos convencionales o los razonamientos del maestro.

El manejo adecuado de los conceptos de divisibilidad permitirá a los alumnos contar con elementos para resolver problemas, tanto de la matemática misma como de aquellos relacionados con otras facetas de la actividad humana.

Hemos elegido el problema de "Construir números con n divisores" para abordar los conceptos relacionados con la *divisibilidad*, y proporcionar una experiencia a los alumnos que les permita valorar su importancia en la solución de problemas. Creemos que trabajar en la solución de problemas propiciará en los alumnos una actitud creativa y los motivará en el aprendizaje de las relaciones numéricas y, además, propiciará el desarrollo de su pensamiento sobre diversos aspectos matemáticos que se deriven de los problemas. Desarrollar la capacidad inventiva, inductiva y deductiva de los alumnos mediante la observación y el estudio de las características que se presentan al resolver el problema, les permite construir su propia simbología y hacer uso de expresiones no convencionales que, posteriormente, mediante la enseñanza, serán capaces de elevar al nivel de formalización que exige la estructura de las matemáticas.

El problema que hemos elegido para conformar este módulo, tiene la característica de estar vinculado con la indagación puramente matemática, que desde la época de los griegos ya se desarrollaba: estudiar los números y sus regularidades. Consideramos que los alumnos de este nivel han tenido algún acercamiento a los conocimientos previos que se requieren para abordar el problema, y que el grado de dificultad para solucionarlo es un reto accesible a los alumnos.

Proponer a los alumnos problemas matemáticos en torno a estos temas y propiciar que ellos los resuelvan, es una estrategia central en esta propuesta de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Planteamiento de los problemas

Primera sesión

Problema 1. *¿Cuáles son los números naturales que sólo se pueden dividir entre sí mismos y 1?*

Problema 2. *¿Cuáles son los números naturales que tienen únicamente tres divisores?*

Problema 3. *¿Cuáles son los números naturales que tienen únicamente cuatro divisores?*

Tarea: *¿Existe un método para generar números con esta característica?*

Problema 4: *¿Cuáles son los números naturales que tienen únicamente n divisores?*

Segunda sesión

Problema 1. *Construir un listado de 10 números naturales que tengan exactamente cuatro divisores. ¿Existe un método para generar números con esta característica?*

Problema 2. *Construir números que tengan exactamente cinco divisores. ¿Existe un método para generar números con esta característica?*

Problema 3. *¿Cuáles son los números naturales que tienen exactamente n divisores?*

Objetivos

- Que el alumno desarrolle habilidades que le permitan resolver problemas matemáticos.
- Que el alumno identifique criterios que le permitan validar las soluciones a los problemas.
- Que el alumno sea capaz de recuperar sus conocimientos matemáticos previos para resolver un nuevo problema matemático.
- Que los alumnos descubran la relación que hay entre los números primos que aparecen en la descomposición de un número y la cantidad de divisores del mismo.
- Que el alumno aprenda a identificar regularidades numéricas a partir de casos particulares.
- Que el alumno aprenda a expresar generalizaciones usando la simbología matemática.

PLANEACIÓN DE LAS ACTIVIDADES CON LOS ALUMNOS

Primera sesión

Proyección de video (4 min). A través de un video se presentan unos problemas relacionados con la actividad matemática que realizaban los filósofos griegos (Cápsula de video).

Comentarios sobre el problema planteado en el video (2 min). Algunos de esos problemas se abordan actualmente en la escuela secundaria.

Organización de los alumnos en equipos de trabajo (8 min). Cada equipo trabaja en la elaboración de una lista de 10 números naturales que sólo tengan dos divisores (Cuaderno).

Exposición de las listas de números elaboradas por los equipos (10 min). Revisión de las listas por parte de los alumnos (Pizarrón).

Elaborar una lista de números con exactamente tres divisores (8 min). (Cuaderno).

Exposición de las listas de números elaboradas por los equipos (10 min). Revisión de las listas por parte de los alumnos (Pizarrón).

Conclusiones (2 min). Extraer las características que permitieron elaborar la lista (Pizarrón).

Tarea (3 min). Elaborar una lista de números con exactamente cuatro divisores y si es posible diseñar un método para encontrarlos (Cuaderno).

Segunda sesión

Recordar el problema planteado en la tarea (2 min). Construir una lista de números con exactamente cuatro divisores y si es posible diseñar un método para encontrarlos.

Síntesis de las actividades realizadas en la sesión anterior (1 min). Característica de los números primos y de los números con exactamente tres divisores.

Organización del grupo en equipos de trabajo (8 min). Cada equipo elabora su lista de números (Cuaderno).

Exposición de las listas de números (8 min). Verificar si las listas se ajustan a la condición pedida (Pizarrón).

Verificar si hay un método para construir números con esas características (5 min). A partir de las distintas maneras que emplearon los alumnos para elaborar la lista encontramos las características que se pueden generalizar (Pizarrón).

Planteamiento de un problema (2 min). ¿Cómo podemos construir números con únicamente cinco divisores?

Verificación de las propuestas de los alumnos (3 min). Elaborar el procedimiento para construir números con esas características (Pizarrón).

Planteamiento del problema general (2 min). ¿Cómo podemos construir números con exactamente n divisores?

Análisis y conclusión de las distintas propuestas (10 min). Elaborar el procedimiento para construir números con esas características. Generalizar los casos anteriores (Pizarrón).

Conclusiones (6 min). Para cada uno de los problemas, hemos diseñado un método para encontrar los números que se piden, hasta llegar al caso general (Pizarrón).

Descripción de las actividades

Primera sesión

Cápsula de video

En ella se muestran algunos de los problemas relacionados con la actividad matemática que realizaban los filósofos griegos, y se plantea la actividad con la que inicia el trabajo en el aula.

Se pide a los alumnos que construyan una lista de números que tengan únicamente dos divisores.

Se organiza a los alumnos en equipos de trabajo, y se les pide que elaboren la lista de números.

El maestro monitorea el trabajo de los equipos.

Exposición de las listas elaboradas por los alumnos.

El maestro pide a los alumnos que alguno de ellos pase al frente y escriba en el pizarrón la lista de números que construyó su equipo.

La mayoría de los alumnos elaboró una lista; el método consistió en verificar que cada uno de los números que tomaron solamente tenía dos divisores.

El maestro comentó la forma en que pueden encontrar los números primos que hay entre 1 y 100 usando la criba de Eratóstenes, y se les dejó de tarea elaborar la criba.

La actividad siguiente consistió en que los alumnos elaboraran una nueva lista de números que tengan exactamente tres divisores.

Algunos equipos elaboran la lista, verificando si cada número si tiene sólo tres divisores, otros la construyen elevando al cuadrado números primos.

Para verificar que los números tenían solamente tres divisores, algunos alumnos representaron los números como producto de primos, y seleccionaron aquellos que cumplieran la condición pedida.

El maestro al frente del grupo organizó las listas de números que los alumnos propusieron. En algunos de ellos se hizo la verificación, encontrando todos los divisores, y se hizo notar que los números naturales se podían expresar como producto de primos. Se propusieron otros números para verificar si esta nueva propiedad la cumplían otros números. El maestro mencionó que esa propiedad de los números se llama *Teorema Fundamental de la Aritmética.*

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r},$$

donde n es un número natural, p_i son números primos para toda i y α_i es un número natural para toda i.

Después de elaborar la lista, se llegó a la conclusión de que los números con únicamente tres divisores son los números primos elevados al cuadrado:

p^2, donde p es un número primo, tiene solamente tres divisores.

Se deja de tarea construir números con exactamente cuatro divisores y encontrar un método que nos permita seleccionar todos los números con esta condición.

Antes de concluir la clase se les pide que construyan dos números con esta característica y completen la lista como tarea para la casa.

Segunda sesión

Se inicia recordando el problema planteado como tarea:

Construir una lista de números con exactamente cuatro divisores y si es posible encontrar un método para encontrarlos todos.

Trabajo en equipo

El maestro propone a los alumnos que cada equipo elabore la lista con base en los números que cada alumno haya pensado, y encuentren el método para generar los números con esa característica.

Exposición

Una vez que los alumnos tuvieron tiempo para elaborar la lista y resolver el problema de encontrar el método, el maestro pide a alguno de los alumnos que la escriban en el pizarrón.

Los alumnos construyeron la lista de dos maneras, multiplicando dos números primos distintos o elevando al cubo un número primo:

$p_1 \times p_2$, donde p_1 y p_2 son números primos distintos,
p_3, donde p es un número primo.

Generalización

Planteamiento del problema general

¿Cómo podemos construir números con exactamente n divisores?

El maestro recupera el procedimiento empleado en cada uno de los casos particulares para que los alumnos descubran el procedimiento para el caso general. Después de que el maestro recupera los ejemplos concretos en el pizarrón, los alumnos conjeturan que

p^{n-1} tiene exactamente n divisores, donde p es un número primo.

Conclusiones

Al final de la sesión, el maestro al frente del grupo concluye:

Los números con solamente dos divisores son los números primos, y para encontrar los que están entre 1 y 100 podemos auxiliarnos de la criba de Eratóstenes.

Los números con exactamente tres divisores se pueden obtener elevando al *cuadrado* los números primos.

Obtenemos los números con exactamente cuatro divisores al elevar al *cubo* un número primo o *multiplicando* dos números primos distintos.

Obtenemos los números con exactamente n divisores al elevar a la potencia $n - 1$ un número primo.

Lo que hicieron los alumnos

Respuestas esperadas

- Que los alumnos elaboraran las listas de números con las características pedidas sin dificultad alguna.
- Que las listas las elaboraran con el criterio de p^{n-1}, con p un número primo, para encontrar el número con n divisores.

Respuestas no esperadas

- Que elaboraran la lista de los primeros números con tres divisores a partir de encontrar todos los divisores de los primeros números naturales, y posteriormente seleccionar los que cumplían la condición.
- Que encontraran los dos procedimientos para localizar números con únicamente cuatro divisores, ya sea por el producto de dos números primos o elevar al cubo cualquier número primo distinto de 1.

Dificultades

Al inicio de la clase no quedaba claro el objetivo de la actividad de elaborar la lista de números primos, los alumnos simplemente se concretaron a elaborarla.

Hasta después de haber resuelto todos los problemas, los alumnos pudieron darle sentido a la actividad de encontrar números con las características pedidas. Las respuestas de los alumnos sugieren que estudiar el comportamiento de los números y pasar de casos particulares a la generalización es una habilidad que está poco desarrollada en las clases.

Planeación de la sesión con los maestros

Proyección de video (4 min). A través de un video se presentan unos problemas relacionados con la actividad matemática que realizaban los filósofos griegos (Cápsula de video).

Comentarios sobre los problemas planteados en el video (2 min). ¿Cuáles son los números naturales que tienen dos, tres, cuatro o n divisores? A cada uno de los maestros se le reparte una hoja con los enunciados de los problemas.

Organización de los maestros en equipos (7 min). Cada equipo trabaja en la elaboración de:

- Una lista de números naturales que solamente tengan dos divisores.
- Una lista de números naturales que solamente tengan tres divisores.
- Una lista de números naturales que solamente tengan cuatro divisores (Cuaderno).

Exposición de las listas de números (3 min). Se pide a alguno de los maestros que escriba en el pizarrón la lista de números que solamente tienen dos divisores, y los demás verifiquen que se cumple la condición pedida (Pizarrón).

Exposición de las listas de números (3 min). Se pide a otro maestro que escriba en el pizarrón la lista de números que solamente tienen tres divisores, y los demás verifiquen que se cumple la condición pedida (Pizarrón).

Exposición de las listas de números (3 min). Se pide a otro maestro que escriba en el pizarrón la lista de números que solamente tienen cuatro divisores, y los demás verifiquen que se cumple la condición pedida (Pizarrón).

Conclusiones (5 min). El coordinador organiza las conclusiones en el pizarrón. Pide a los maestros las características que permitieron elaborar las listas. También pide la respuesta al problema de encontrar números con n divisores (Pizarrón).

El coordinador plantea el siguiente problema (2 min). Determinar una regla que nos permita encontrar todos los números con exactamente n divisores (Pizarrón).

Trabajo en equipo (3 min). El coordinador pide que trabajen en equipo y resuelvan el problema planteado (Cuaderno).

Verificación de las propuestas (5 min). El coordinador pide a los maestros que vayan pasando, uno por uno, a exponer sus conclusiones (Pizarrón).

Análisis y conclusiones. El coordinador, al frente del grupo, organiza las conclusiones (Pizarrón).

Descripción de las actividades

Cápsula de video

En ella se muestran unos problemas relacionados con la actividad matemática que realizaban los filósofos griegos.

Se les proporciona una hoja con los problemas presentados en el video.

Se pide a los maestros resuelvan los tres primeros problemas contenidos en la hoja, y elaboren:

- Una lista de números naturales que solamente tengan dos divisores.
- Una lista de números naturales que solamente tengan tres divisores.
- Una lista de números naturales que solamente tengan cuatro divisores.

Se organiza a los maestros en equipos de trabajo.

El coordinador monitorea el trabajo de los equipos.

El coordinador pide a los maestros que expongan en el pizarrón las listas de números con las características pedidas.

Al frente del grupo, el coordinador organiza las conclusiones, relacionadas con los criterios que usaron para elaborar las listas, y pregunta si con lo trabajado hasta ese momento pueden generalizar el criterio para encontrar números con n divisores.

Para finalizar, el coordinador plantea el problema siguiente:

Encontrar una regla que nos permita determinar exactamente el número de divisores que tiene cualquier número natural mayor que 1.

Los maestros trabajan en equipo buscando la solución al problema planteado.

El coordinador pide a alguno de los maestros que exponga lo que encontró respecto a la regla pedida.

El coordinador concluye la clase con la descripción de la regla que permite determinar el número de divisores de cualquier número natural.

Lo que hicieron los maestros

Respecto a la lista de números con dos divisores únicamente, lo que hicieron fue un listado de los primeros números naturales, hasta el 34 y a cada uno le calcularon sus divisores, seleccionaron los que sólo tenían dos divisores, y concluyeron que eran los números primos.

Para el caso de únicamente tres divisores, encontraron que los números de la lista anterior, los números primos, había que elevarlos al cuadrado para obtener los números con esta característica: p^2, con p número primo, y determinaron sus divisores:

$$1, p \text{ y } p^2.$$

De igual manera, para obtener números con únicamente cuatro divisores, elevaron al cubo los números primos: p^3, con p número primo; también multiplicando dos números primos distintos: $p_1 \times p_2$, con p_1 y p_2 números primos.

Por ejemplo:

$$2^3 = 8,$$

y los divisores de 8 son: 1, 2, 4 y 8.

Para el caso del producto de dos números primos:

$$3 \times 5 = 15,$$

y los divisores de 15 son: 1,3, 5 y 15.

Para el caso de únicamente n divisores, la conjetura, con base en los casos anteriores es:

$$p^{n-1}.$$

Esta expresión nos permite encontrar números con exactamente n divisores, pero no asegura que todo número con exactamente n divisores tenga esta forma. En el caso de exactamente cuatro divisores, se necesitó de otra expresión distinta a ésta.

Ahora el problema era encontrar una expresión que determinara el número de divisores que tiene cualquier número natural.

Los maestros trabajaron en equipo y después de algunos minutos encontraron que, para casos particulares como

$$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 900,$$

- el número $2^2 = 4$ tiene 3 divisores, (2+1),
- el número $3^2 = 9$ tiene 3 divisores (2+1), y
- el número $5^2 = 25$ tiene 3 divisores (2+1).

Entonces, la cantidad de divisores que tiene el número 900 es:

$$(2 + 1) \times (2 + 1) \times (2 + 1) = 27,$$

y son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 36, 45, 50, 60, 75, 90, 100, 150, 180, 225, 300, 450, 900.

En general, si $p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} = n$, con p_1 y p_2 números primos distintos, y a_1 y a_2 números naturales cualesquiera, entonces el número de divisores de n es

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1).$$

Si $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_r^{a_r}$, con $p_1, p_2, \ldots, p_r$ números primos distintos, y a_1, a_2, ..., a_r números naturales cualesquiera, entonces el número de divisores de n es

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_r + 1).$$

Respuestas esperadas

- Que los maestros elaboraran las listas de números con las características pedidas sin dificultad alguna.
- Que las listas las elaboraran con el criterio de que p^{n-1}, con p un número primo y n cualquier número natural mayor que 1, tiene exactamente n divisores.

Respuestas no esperadas

- Que elaboraran la lista de los primeros números naturales, y en cada uno de ellos determinaran el número de divisores.
- Que formularan la expresión general para obtener el número de divisores que tiene cualquier número natural.
- Si $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_r^{a_r}$, con $p_1, p_2, \ldots, p_r$ números primos distintos, y $a_1, a_2, \ldots, a_r$ números naturales cualesquiera, entonces el número de divisores de n es

$$(a_1 + 1)\,(a_2 + 1)\,\ldots\,(a_r + 1).$$

Dificultades

El resultado que se planteó por parte de los maestros, relacionado con el número de divisores de un número, se verificó en varios casos, pero no se logró mostrar que en general es cierto.

Lo que aprendieron los alumnos

- Que los números naturales se pueden clasificar según el número del número de divisores que tengan.
- La criba de Eratóstenes sirve para encontrar todos los números primos que sean menores a 100.
- Que p^{n-1}, con p un número primo y n un número natural mayor que 1, tiene exactamente n divisores.
- Para el caso de números con cuatro divisores, aparte de la regla anterior, aprendieron que con el producto de dos números primos distintos también determina números con esta propiedad.
- Que todo número compuesto se puede expresar como producto de factores primos en forma única, excepto por el orden de los factores, y que a este resultado se le conoce como el *Teorema Fundamental de la Aritmética.*
- Que aprender matemáticas también tiene que ver con encontrar características y propiedades de los números.

Recomendaciones para la enseñanza

Las respuestas de los alumnos y de los maestros a los problemas que se les plantearon en el marco de sus logros y dificultades, así como las vicisitudes que tuvo que enfrentar el coordinador que dirigió las sesiones de trabajo, nos orientan para hacer las siguientes recomendaciones:

- Permitir que los alumnos resuelvan los problemas que se les plantean, respetando al máximo sus procedimientos y formas de razonamiento.
- Ajustar el desarrollo de la clase conforme a los resultados que los alumnos van obteniendo.
- Preparar los problemas relacionados con los temas y asegurarse que en la clase se aborda el tema propuesto.
- En muchos problemas pedir a los alumnos que generen su simbología o que usen expresiones libres les permite manifestar sus ideas más claramente. Si no conocen la simbología convencional, permitirles que construyan la que mejor exprese sus ideas.
- Es importante que aunque los alumnos utilicen expresiones no convencionales o inventen su simbología, se trabaje con ellos hasta encontrar la relación con el lenguaje y la simbología convencional, y en todos los casos encontrar la relación de los conocimientos nuevos con los contenidos ya establecidos.

Ampliación del tema

En esta sección abundaremos en el tratamiento de algunos resultados básicos de divisibilidad; en algunos casos será necesario plantearlos de manera más rigurosa.

Decimos que un número natural n es primo si sus únicos divisores son él mismo y la unidad.

Y a los números naturales que no son primos se les llama compuestos.

Si un número es compuesto, entonces, ¿cómo es el menor divisor distinto del número 1?

Por ejemplo, tomemos el número 175.

Los divisores son 1, 5, 7, 25, 35 y 175, y el menor de los divisores distinto de 1 es 5, que es un número primo.

Conjeturamos que si un número natural es compuesto, entonces el menor de los divisores distinto de 1 es primo.

El siguiente razonamiento justifica la afirmación anterior.

Sea r el menor divisor de n; r tiene dos posibilidades: es primo o es compuesto. Si es primo, está justificada la afirmación; si es compuesto entonces tiene un divisor s tal que

$$r = t \times s, \text{ con } r, s \text{ y } t \text{ números naturales.}$$

Como n es un número compuesto, entonces

$$n = r \times q, \text{ con } r \text{ y } q \text{ números naturales}$$

y

$$n = r \times q = t \times s \times q, \text{ con } s < r.$$

Por lo que r no sería el menor divisor de n, lo cual contradice la hipótesis.

Entonces r no puede ser compuesto y, por lo tanto, es primo.

Euclides, en el libro XI demostró el siguiente resultado:

> La serie de números primos es ilimitada, es decir, la cantidad de números primos es infinita.

Supongamos que existe un número primo p mayor que todos los demás. Consideremos el producto de todos los números primos menores que p,

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \ldots \times p\,;$$

a este número le sumamos 1 y obtenemos el número

$$q = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \ldots \times p) + 1.$$

Si q es un número primo entonces p no es el mayor de los números primos.

Si q es compuesto, por la proposición anterior, el divisor mas pequeño r es un número primo, pero r es distinto a todos los números primos menores que o iguales a p. Los números primos 2, 3, 5, 7, 11,..., p no son divisores de q, cada uno de ellos al dividir a q deja residuo 1.

Entonces el divisor más pequeño de q, que es r, número primo, es más grande que p, lo que significa que dado un número primo p, siempre podemos encontrar uno mayor.

Por lo tanto, la sucesión de los números primos es ilimitada.

El siguiente teorema fue demostrado por Gauss, y tiene una importancia fundamental en la teoría de números. Se le conoce como

Teorema fundamental de la aritmética

Todo número natural compuesto se puede expresar como producto de factores primos en forma única.

La demostración del teorema contempla dos partes.

i) Existencia: Si n es un número natural compuesto entonces se puede descomponer en factores primos.
ii) Unicidad: La descomposición de n en factores primos es única, excepto por el orden de los factores.

i) Existencia. Si n es un número compuesto entonces tiene un divisor primo, lo que significa que

$$n = p_1 \times q_1 \text{, con } p_1 \text{ primo y } q_1 < n;$$

si q_1 es primo, el teorema queda demostrado; si q_1 es compuesto entonces tiene un divisor primo, lo que significa que $q_1 = p_2 \times q_2$, con p_2 primo y

$q_2 < q_1$; y procediendo de esta manera, en un número finito de pasos llegamos a que

$$n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_k \text{, con } p_i \text{ primo para } i = 1,2,3,\ldots, k.$$

ii) Unicidad. Para demostrar la unicidad, necesitamos el siguiente resultado: Si un número primo divide al producto de varios números primos entonces necesariamente es igual a uno de ellos.

Regresando a la demostración del teorema, supongamos que hay dos factorizaciones distintas:

$$n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_k, \quad \text{con} \quad p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \ldots \leq p_k, \text{ y}$$
$$n = q_1 \times q_2 \times q_3 \times \ldots \times q_r, \quad \text{con} \quad q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \ldots \leq q_r.$$

Sin perdida de generalidad, supongamos que $k \leq r$. Entonces, como

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_k = q_1 \times q_2 \times q_3 \times \ldots \times q_r,$$

p_1 divide a $q_1 \times q_2 \times q_3 \times \ldots \times q_r$; como todos son primos, $p_1 = q_i$ para alguna $i = 1, 2, 3, \ldots r$, de donde $p_1 \geq q_1$.

Análogamente, q_1 divide a $p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_k$; por lo que $q_1 = p_i$ para alguna $i = 1, 2, 3, \ldots r$, de donde $q_1 \geq p_1$, y así $p_1 = q_1$.

Simplificando en

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_k = q_1 \times q_2 \times q_3 \times \ldots \times q_r,$$

obtenemos que

$$p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_k = q_2 \times q_3 \times \ldots \times q_r.$$

Repitiendo el proceso anterior, tenemos que

$$p_2 = q_2, \; p_3 = q_3, \ldots, \; p_k = q_k.$$

Como $k \leq r$,

$$1 = q_{k+1} \times q_{k+2} \times \ldots . \times q_r ;$$

pero cada número q_i, con $i = 1, 2, 3, \ldots\ r$, es primo.

La igualdad anterior es imposible, así que $k = r$.

Concluimos que la factorización es única.

De los resultados que se obtuvieron en la sesión con los maestros, uno de ellos tiene que ver con el número de divisores de un número natural. Por ejemplo, para el número 504 se tiene que

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7,$$

por lo que tiene $(3+1)\ (2+1)\ (1+1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$ divisores.

Una manera de contar todos los divisores es la siguiente:

Con 2^3 construimos los divisores 1, 2, 4 y 8, y los podemos expresar como potencias de 2:

$$\left(1+2+2^2+2^3\right).$$

Con 3^2 construimos los divisores 1, 3 y 9, y los expresamos como potencias de 3:

$$\left(1+3+3^2\right).$$

Con 7, construimos los divisores 1 y 7.

Cada divisor positivo de 504 aparece una y sólo una vez como término de la expresión siguiente:

$$\left(1+2+2^2+2^3\right) \times \left(1+3+3^2\right) \times (1+7),$$

que son 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 56, 63, 72, 84, 126, 168, 252 y 504.

Generalizando el proceso anterior, tenemos que si n es un número natural y $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$, donde $p_1, p_2, \ldots p_r$ son números primos y cada exponente α_i es un número natural para toda $i = 1, 2, \ldots, r$, entonces el número de divisores de n es igual a

$$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_r + 1).$$

Para justificar el resultado anterior procedemos de la siguiente manera:

Tomamos a

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r};$$

entonces, cada divisor positivo de n aparece una y sólo una vez como término de la expresión siguiente:

$$\left(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1}\right) \times \left(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}\right) \times \ldots \times \left(1 + p_r + p_r^2 + \ldots + p_r^{\alpha_r}\right).$$

Luego, el número de divisores positivos de n es igual al número de términos de la expresión anterior, es decir,

$$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_r + 1).$$

BIBLIOGRAFÍA

Aleksandrov, A. D., A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros. *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Madrid, España, Alianza Universidad, 1980.

Bortolussi, Jesús, Elisa Bonilla, Rocío Nava, Teresa Rojano y Ricardo Quintero. *Libro para el Maestro.* México, SEP, 1995.

Cárdenas, Humberto, Emilio Lluis, Francisco Raggi y Francisco Tomás. *Álgebra Superior.* México, Editorial Trillas, 1974.

Courant, Richard y Herbert Robbins. *¿Qué es la matemática?* España, Aguilar, 1955.

Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* México, Editorial Trillas, 1965.

Sierra Modesto, M. Teresa González, Andrés García, Mario González. *Divisibilidad 7.* España, Editorial Síntesis, 1989.

El módulo 1: *Múltiplos y divisores*
de la serie: Enseñanza de las matemáticas, sección: Aritmética
del Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
del proyecto: Tecnología y Educación a Distancia
en América Latina y el Caribe,
cuya edición estuvo a cargo de Fomento Editorial
de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria
de la Universidad Pedagógica Nacional,
se terminó de imprimir en marzo de 2006 en los talleres
Compuformas PAF S.A. de C.V. Av. Coyoacan 1031. CP. 03100, Col. del Valle.